

Les invariants polynômes de la représentation coadjointe de groupes inhomogènes

par : Mustapha RAIS (Poitiers)

Introduction

Récemment Akaki TIKARADZE m'a posé diverses questions sur le centre $ZU(\mathfrak{p})$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{p})$ d'algèbres de Lie $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \times_{\rho} V$, produits semi-directs d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} par un espace vectoriel V , relativement à une représentation linéaire ρ de \mathfrak{g} dans V . A isomorphisme d'algèbres près (l'isomorphisme de Duflo), on peut se contenter d'examiner l'algèbre $Y(\mathfrak{p})$ des invariants de \mathfrak{p} dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} (i.e. dans l'algèbre des fonctions polynomiales sur l'espace vectoriel \mathfrak{p}^* des formes linéaires sur \mathfrak{p}). Il se trouve que les algèbres de Lie \mathfrak{p} auxquelles s'intéressait A. Tikaradze ont donné lieu à plusieurs travaux anciens et récents. Le lecteur trouvera ci-dessous dans plusieurs notes bibliographiques des indications précises sur certains de ces travaux, en particulier ceux de Hitoshi KANETA ([Ka-1] et [Ka-2]) et de Dmitri PANYUSHEV ([Pa]). On trouvera dans les bibliographies des articles de Kaneta et de Panyushev une liste de travaux portant sur ces questions, que je n'ai pas consultés et que je m'excuse de ne pas citer.

Le but de ce texte, qui ne prétend pas à une grande originalité, est d'expliciter pour certaines algèbres d'invariants dans $S(\mathfrak{p})$, un système de générateurs.

Notations :

- Le corps de base est \mathbb{C} . L'espace vectoriel V est \mathbb{C}^n , identifié à l'espace $M_{n,1}$ des matrices colonnes, son dual V^* est identifié à l'espace $M_{1,n}$ des matrices lignes.

- Lorsque x est une matrice carrée de taille n , on note $p_1(x), \dots, p_n(x)$ les coefficients du polynôme caractéristique écrit sous la forme :

$$\det(tI_n - x) = t^n - p_1(x)t^{n-1} - p_2(x)t^{n-2} - \dots - p_n(x)$$

et B_0, B_1, \dots, B_{n-1} les gradients respectifs de p_1, \dots, p_n calculés au moyen de la forme trace :

$$\text{tr}(B_k(x)y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 p_{k+1}(x + ty) \quad (y \in M_n(\mathbb{C})).$$

Les expressions explicites des B_k sont les suivantes :

$$\begin{aligned} B_0(x) &= I_n \\ B_k(x) &= x^k - p_1(x)x^{k-1} - \dots - p_k(x)I_n \quad (1 \leq k \leq n-1) \end{aligned}$$

Les cas traités ici sont ceux des groupes "inhomogènes" :

$$SL(n) \times \mathbb{C}^n = ISL(n), \quad O(n) \times \mathbb{C}^n = IO(n),$$

$$SO(n) \times \mathbb{C}^n = ISO(n)$$

et celui du groupe :

$$GL(n) \times_{\rho} (V \oplus V^*) \quad (\rho(g).(u, v^*) = (g.u, v^*g^{-1}))$$

qui est très peu différent d'une \mathbb{Z}_2 -contraction au sens de Panyushev et qui est utilisé dans [Ti].

1 Le cas $ISL(n)$

1.1. Au préalable, on revient sur le groupe affine de \mathbb{C}^n : $A = G \times \mathbb{C}^n$, avec $G = GL(n)$ et $\rho(g).u = g.u$, dont la représentation coadjointe a été étudiée en détail dans [Ra-1]. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \times_{\rho} V$, (où $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$), est d'indice zéro et l'algèbre $Y'(\mathfrak{a})$ engendrée par les semi-invariants de A dans $S(\mathfrak{a})$ est engendrée par un polynôme f , dont on rappelle l'expression ci-dessous.

Pour cela, on identifie \mathfrak{a}^* à l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times V^*$: un couple (y, v^*) dans $\mathfrak{g} \times V^*$ définit sur \mathfrak{a} la forme linéaire ℓ telle que, pour tout (x, u) dans \mathfrak{a} :

$$\langle \ell, (x, u) \rangle = tr(yx) + v^*u$$

(où v^*u est le produit matriciel, et $v^*u = tr(uv)$ si on préfère).

L'algèbre $Y'(\mathfrak{a})$ est $\mathbb{C}[f]$, où f est défini comme un déterminant de n vecteurs lignes :

$$f(y, v^*) = det(v^*B_{n-1}(y), v^*B_{n-2}(y), \dots, v^*)$$

pour tout (y, v^*) dans \mathfrak{a}^* , et on a, lorsque $(g, u) \in A$:

$$f(Ad^*(g, u).(y, v^*)) = (det g)^{-1} f(y, v^*).$$

Tout ceci est démontré dans [Ra-1] (c.f. en cas de besoin les numéros 2.15, 3.7 et 3.8).

1.2. On s'intéresse maintenant aux covariants $\Phi : \mathfrak{a}^* \longrightarrow V^*$, c'est-à-dire aux fonctions polynomiales Φ telles que :

$$\Phi(Ad^*(g, u).\ell) = \Phi(\ell)g^{-1} \quad ((g, u) \in A, \ell \in \mathfrak{a}^*).$$

On définit n fonctions Φ_k en posant :

$$\Phi_k(y, v^*) = v^*B_k(y) \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

Lemme : ([Ra-1], 4.6)

L'espace vectoriel des covariants $\Phi : \mathfrak{a}^ \longrightarrow V^*$ est de dimension n et $(\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1})$ en est une base.*

1.3. Soit $P = ISL(n)$ le sous-groupe de A constitué par les couples (g, u) avec : $det g = 1$. Son algèbre de Lie \mathfrak{p} s'identifie à la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{a} constituée par les couples (y, v^*) tels que $tr(y) = 0$, de sorte que $\mathfrak{p} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ est l'algèbre dérivée de \mathfrak{a} . D'après [Ra-1] (n^o 3.10), l'algèbre

$Y(\mathfrak{p})$ est $\mathbb{C}[\bar{f}]$, où \bar{f} est la restriction de f à \mathfrak{p}^* , \mathfrak{p}^* étant identifié au sous-espace $sl(n) \times V^*$ de \mathfrak{a}^* .

1.4. Note bibliographique :

L'étude du groupe $ISL(n)$ apparaît dans un article de Hitoshi Kaneta ([Ka-1]). L'auteur introduit un sous-espace vectoriel de dimension n de \mathfrak{p}^* , noté \mathfrak{h} , qui est l'espace des (y, v^*) avec :

$$y = a_1 E_{21} + \cdots + a_{n-1} E_{n,n-1}, \quad v^* = be_n^*$$

où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathfrak{gl}(n)$, $e_n^* = (0, \dots, 0, 1)$, $(a_1, \dots, a_{n-1}, b) \in \mathbb{C}^n$, définit une fonction polynôme t sur \mathfrak{h} :

$$t(a_1 E_{21} + \cdots + a_{n-1} E_{n,n-1}, be_n^*) = \left(\prod_{1 \leq k \leq n-1} a_k^k \right) b^n$$

et énonce le :

Théorème : ([Ka-1], Theorem 1)

L'application de restriction de $Y(\mathfrak{p})$ dans l'ensemble des polynômes sur \mathfrak{h} est un homomorphisme d'algèbres injectif, dont l'image est $\mathbb{C}[t]$.

On constate alors que t n'est autre que la restriction de \bar{f} à \mathfrak{h} . La contribution de [Ra-1] consiste donc en l'expression explicite, en fonction des coordonnées naturelles (y, v^*) , du générateur de $Y(\mathfrak{p})$ dont la restriction à \mathfrak{h} est t . On notera que [Ra-1] date de 1978, alors que [Ka-1] date de 1984.

2 Le cas $GL(n) \times (V \oplus V^*)$

2.1. Ici aussi, on pose $GL(n) = G$ et $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{g}$; la représentation ρ est la somme directe de la représentation naturelle de G dans V et de sa représentation duale dans V^* :

$$\rho(g).(u, v^*) = (g.u, v^*g^{-1})$$

On notera B le groupe considéré, \mathfrak{b} son algèbre de Lie, et \mathfrak{b}^* le dual de \mathfrak{b} . Comme espace vectoriel, on a : $\mathfrak{b} = \mathfrak{g} \times V \times V^*$, avec le crochet qui définit le produit semi-direct $\mathfrak{g} \times_{\rho'} (V \oplus V^*)$:

$$[(x, 0, 0), (0, u, v^*)] = (0, x.u, -v^*x)$$

$$\rho'(x).(u, v^*) = (x.u, -v^*x)$$

Comme espace vectoriel, on a : $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{g} \times V^* \times V$; un élément (y, w^*, ξ) de $\mathfrak{g} \times V^* \times V$ définit la forme linéaire ℓ sur \mathfrak{b} , telle que, pour tout (x, u, v^*) dans \mathfrak{b} :

$$\langle \ell, (x, u, v^*) \rangle = \text{tr}(yx) + w^*u + v^*\xi$$

On identifie G au sous-groupe $G \times (0, 0)$. Lorsque $g \in G$, on a alors :

$$Ad_B(g).(x, u, v^*) = (gxg^{-1}, g.u, v^*g^{-1})$$

$$Ad_B^*(g).(y, w^*, \xi) = (gyg^{-1}, w^*.g^{-1}, g.\xi)$$

2.2. L'application $(g, u) \mapsto (g, u, 0)$ identifie le groupe A qui a fait l'objet du n° 1 ci-dessus, à un sous-groupe de B , ce qui induit une identification de l'algèbre de Lie \mathfrak{a} à la sous-algèbre de \mathfrak{b} constituée par les triplets $(x, u, 0)$, et de même le dual \mathfrak{a}^* au sous-espace de \mathfrak{b}^* constitué par les $(y, w^*, 0)$.

Ceci étant, on constate que B est le produit semi-direct de A par V^* , relativement à la représentation linéaire δ de A dans V^* :

$$\delta(g, u).v^* = v^*g^{-1}$$

et que \mathfrak{b} est le produit semi-direct de l'algèbre de Lie \mathfrak{a} par V^* relativement à la représentation linéaire δ' de \mathfrak{a} dans V^* avec :

$$\delta'(x, u).v^* = -v^*x.$$

L'indice de la représentation δ' est zéro et l'application de la formule de l'indice ([Ra-2]) montre que l'indice de l'algèbre \mathfrak{b} est n .

On utilisera les résultats de [Ra-1], dont certains ont été rappelés ci-dessus, pour déterminer de façon explicite un système de générateurs de $Y(\mathfrak{p})$.

2.3. Dans \mathfrak{a}^* , l'orbite coadjointe ouverte est l'ensemble Ω des (y, w^*) tels que $f(y, w^*) \neq 0$. Parmi les formes régulières sur \mathfrak{a} , on a privilégié la forme $\ell_0 = (J, e_n^*)$, où $e_n^* = (0, \dots, 0, 1)$ et J est la matrice nilpotente (principale) définie par :

$$e_1^*J = 0, \quad e_2^*J = e_1^*, \dots, e_n^*J = e_{n-1}^*$$

((e_1^*, \dots, e_n^*) est la base naturelle de $\mathbb{C}^n = M_{1,n}$). Le stabilisateur de ℓ_0 dans A est trivial ([Ra-1], 3.2) et l'application bijective orbitale $T : A \rightarrow \Omega$ ($T(a) = Ad_A^*(a).\ell_0$) admet une application réciproque T^{-1} qui a été déterminée explicitement ([Ra-1], 3.8).

On note $\tilde{\Omega}$ l'ouvert $\Omega \times V$ de \mathfrak{b}^* . Soit $\ell = (y, w^*, \xi)$ dans $\tilde{\Omega}$. L'unique élément (g, u) de A tel que $Ad_A^*(g, u).\ell = \ell_0$ est tel que :

$$g = L(w^*B_{n-1}(y), w^*B_{n-2}(y), \dots, w^*)$$

où on a mis en évidence les lignes de g . Précisément :

$$e_1^*g = w^*B_{n-1}(y), \quad e_2^*g = w^*B_{n-2}(y), \dots, e_n^*g = w^*$$

Soit $F : \mathfrak{b}^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction invariante sous l'action coadjointe de B dans \mathfrak{b}^* . Lorsque $(y, w^*, \xi) = \ell$ appartient à $\tilde{\Omega}$, on a donc :

$$F(\ell) = F(Ad_B^*(g, u).\ell) = F(J, e_n^*, g.\xi)$$

où g est la matrice explicitée ci-dessus, de sorte que $g.\xi$ est le vecteur colonne dont les coordonnées dans la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) sont : $w^*B_{n-1}(y)\xi, w^*B_{n-2}(y)\xi, \dots, w^*\xi$. Précisément :

$$g.\xi = \sum_k (w^*B_{n-k}(y).\xi)e_k$$

2.4. Proposition :

1. Les fonctions $F_k : \mathfrak{b}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$F_k(y, w^*, \xi) = w^*B_k(y)\xi \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

sont des fonctions (polynomiales) $Ad^*(B)$ -invariantes sur \mathfrak{b}^* , algébriquement indépendantes.

2. $Y(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}[F_0, \dots, F_{n-1}]$ est l'algèbre de polynômes engendrée par : F_0, \dots, F_{n-1} .

DÉMONSTRATION :

1. - Les fonctions F_k sont liées aux covariants Φ_k définis dans 1.2 de la manière suivante :

$$F_k(y, w^*, \xi) = \Phi_k(y, w^*)\xi$$

Lorsque (g, u) est un élément de A , on a :

$$\begin{aligned} F_k(Ad_B^*(g, u).(y, w^*, \xi)) &= F_k((Ad_A^*(g, u).(y, w^*), g\xi) \\ &= \Phi_k(Ad_A^*(g, u).(y, w^*)).g\xi \\ &= \Phi_k(y, w^*)g^{-1}g\xi \\ &= F_k(y, w^*, \xi) \end{aligned}$$

Ainsi les F_k sont $Ad_B^*(A)$ -invariantes. Pour montrer qu'elles sont $Ad^*(B)$ -invariantes, il reste à prouver que :

$$F_k(y + \xi v^*, w^*, \xi) = F_k(y, w^*, \xi)$$

pour tout v^* dans V^* , ou encore que :

$$B_k(y + \xi v^*)\xi = B_k(y)\xi \quad (v^* \in V^*)$$

On constate alors que ces égalités résultent immédiatement des égalités : $v^*B_k(y + uv^*) = v^*B_k(y)$ démontrées dans ([Ra-1], 4.5).

- Par ailleurs : $F_k(J, e_n^*, \xi) = e_n^*B_k(J)\xi = e_n^*J^k\xi = \xi_{n-k}$ (avec : $\sum_k \xi_k e_k = \xi$). Ceci montre que les F_k sont algébriquement indépendantes.

2. Soit $F : \mathfrak{b}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale $Ad^*(B)$ -invariante et soit $\overline{F} : V \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\overline{F}(\xi) = F(J, e_n^*, \xi) \quad (\xi \in V)$$

La fonction \overline{F} est polynomiale et :

$$F(y, w^*, \xi) = \overline{F}\left(\sum_k F_k(y, w^*, \xi)e_{n-k}\right)$$

pour tout (y, w^*, ξ) dans $\tilde{\Omega}$, donc pour tout (y, w^*, ξ) dans \mathfrak{b}^* .

2.5. Soit ℓ dans $\tilde{\Omega}$. Le stabilisateur de ℓ dans A , i.e. $B^\ell \cap A$, est trivial. L'orbite sous A de ℓ , i.e. $Ad_B^*(A).\ell$, est de codimension n dans \mathfrak{b}^* . Donc ℓ est une forme régulière sur \mathfrak{b} . Il est s?r qu'il existe d'autres formes régulières sur \mathfrak{b} , par exemple les $\ell = (y, w^*, v)$ telles que les vecteurs :

$$v, B_1(y)v, \dots, B_{n-1}(y)v$$

soient linéairement indépendants. La détermination de toutes les formes régulières reste à faire.

- 2.6.** Soit $\pi : \tilde{\Omega} \longrightarrow V$ définie par :

$$\pi(\ell) = \sum_k F_k(\ell)e_{n-k}$$

Il est facile de voir que $\pi(\ell_1) = \pi(\ell_2)$ si et seulement si ℓ_1 et ℓ_2 sont $Ad_B^*(A)$ -conjugués. Autrement dit : $\tilde{\Omega}$ est un A -fibré principal. De plus, lorsque $\ell \in \tilde{\Omega}$, on a : $(Ad_B^*(B).\ell) \cap \tilde{\Omega} = Ad_B^*(A).\ell$ (l'orbite sous A de ℓ est un ouvert de l'orbite (coadjointe) sous B de ℓ).

2.7. L'algèbre $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{g}}$ des invariants de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ dans $S(\mathfrak{b})$ est connue (c.f. [Ra-1], n° 5.6). C'est l'algèbre engendrée par les $2n$ fonctions (de y, w^*, ξ) :

$$p_1(y), \dots, p_n(y), w^*\xi, w^*y\xi, \dots, w^*y^{n-1}\xi$$

ou, ce qui revient au même, par les fonctions :

$$p_1, p_2, \dots, p_n, F_0, F_1, \dots, F_{n-1}.$$

On voit alors que le centralisateur (ou le commutant) de \mathfrak{g} dans l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ de \mathfrak{b} , est engendré comme algèbre par la réunion du centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et du centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$. Il est donc commutatif (voir [Ra-3] pour des résultats de ce type).

2.8. Il est possible de trouver une autre expression des F_k . Pour cela, on s'intéresse aux matrices carrées X de taille $(n+1)$, qu'on écrit sous la forme : $X = \begin{pmatrix} y & v \\ w^* & a \end{pmatrix}$, avec y dans $\mathfrak{gl}(n)$, v dans V , w^* dans V^* et a dans \mathbb{C} . On peut alors ([Ra-3], n° 1.3, formules (1;6)) calculer le polynôme caractéristique de X , et on trouve :

$$\begin{aligned} p_1(X) &= p_1(y) + a \\ p_{k+2}(X) &= p_{k+2}(y) - ap_{k+1}(y) + w^*B_k(y)v \quad (0 \leq k \leq n-2) \\ p_{n+1}(X) &= -ap_n(y) + w^*B_{n-1}(y)v \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} F_k(y, w^*, \xi) &= p_{k+2} \left(\begin{pmatrix} y & v \\ w^* & 0 \end{pmatrix} \right) - p_{k+2}(y) \quad (0 \leq k \leq n-2) \\ F_{n-1}(y, w^*, \xi) &= p_{n+1} \left(\begin{pmatrix} y & v \\ w^* & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

2.9. Note bibliographique :

La décomposition : $\begin{pmatrix} x & u \\ v^* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ v^* & 0 \end{pmatrix}$ fait de $\mathfrak{gl}(n+1)$ une algèbre de Lie symétrique :

$$\mathfrak{gl}(n+1) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n) \times \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ v^* & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

à laquelle est associée l'algèbre de Lie $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$, produit semi-direct de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 par le \mathfrak{g}_0 -module \mathfrak{g}_1 . On se reportera à [Pa] pour une étude complète des algèbres de Lie de ce type (les \mathbb{Z}_2 -contractions des algèbres de Lie réductives), l'algèbre de Lie \mathfrak{k} définie ci-dessus en étant un

exemple. En particulier, Panyushev donne un procédé pour trouver un système de générateurs de l'algèbre $Y(\mathfrak{k}')$, \mathfrak{k}' étant une \mathbb{Z}_2 -contractée, et ce procédé est visible dans les formules (1;6) de [Ra-3] réécrites ci-dessus pour l'algèbre de Lie \mathfrak{b} . Toutefois, il faut signaler que \mathfrak{b} ne coïncide pas avec \mathfrak{k} . L'application $M : \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{k}$ définie par :

$$M(x, u, v^*) = \begin{pmatrix} x & u \\ v^* & 0 \end{pmatrix}$$

est un monomorphisme d'algèbres de Lie dont l'image est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{k} .

2.10. Remarque :

Suivant la démonstration de 2.4, on voit qu'on a le résultat suivant : Toute fonction numérique continue sur \mathfrak{b}^* , qui est $Ad_B^*(A)$ -invariante, est automatiquement $Ad^*(B)$ -invariante.

Concernant les fonctions généralisées, on peut montrer qu'une fonction généralisée sur l'ouvert $\tilde{\Omega}$, qui est localement A -invariante, est automatiquement localement B -invariante.

3 Les cas $IO(n)$ et $ISO(n)$

3.1. On considère ici les groupes $C = IO(n)$ et $C^o = ISO(n)$, précisément : $C = O(n) \times \mathbb{C}^n$, $C^o = SO(n) \times \mathbb{C}^n$, (avec $\rho(g).u = g.u$ dans les deux cas). L'algèbre de Lie commune à ces deux groupes est $\mathfrak{c} = \mathfrak{so}(n) \times \mathbb{C}^n$. Les invariants dans $S(\mathfrak{c})$ sous l'action coadjointe de C et de C^o , notés respectivement J et $Y(\mathfrak{c})$, sont a priori distincts, avec $J \subset Y(\mathfrak{c})$. On montrera plus bas que $J = Y(\mathfrak{c})$ lorsque n est pair, et que par contre lorsque n est impair, $Y(\mathfrak{c})$ est un J -module de rang 2.

3.2. On peut identifier \mathfrak{c} à une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie \mathfrak{b} du numéro précédent, au moyen de l'application $\gamma : \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{b}$, définie par : $\gamma(x, u) = (x, u, -{}^t u)$ (ici et ailleurs ${}^t X$ désigne la transposée de la matrice X). Le dual \mathfrak{c}^* s'identifie alors au sous-espace de \mathfrak{b}^* constitué par les formes linéaires $\ell = (y, w^*, \xi)$, avec y dans $\mathfrak{so}(n)$, et $\xi = -{}^t w^*$, de sorte qu'on peut parler de la restriction à \mathfrak{c}^* des fonctions définies dans \mathfrak{b}^* . On a en particulier :

$$F_k(y, w^*, -{}^t w^*) = -w^* B_k(y) {}^t w^*$$

Lorsque k est impair, la matrice $B_k(y)$ est antisymétrique, et par suite, la restriction de F_k à \mathfrak{c}^* est nulle. On est amené à considérer les fonctions $\psi_k : \mathfrak{c}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par :

$$\psi_k(y, w^*) = -w^* B_{2k}(y) {}^t w^* \quad (0 \leq k \leq [\frac{n}{2}])$$

(ici et ailleurs, $[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$).

3.3. Remarques

1. Soit $\theta : \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{b}$ l'application linéaire définie par :

$$\theta(x, u, v^*) = -({}^t x, {}^t v^*, {}^t u) \quad (x, u, v^*) \in \mathfrak{b}$$

qui n'est autre que l'opposée de la transposition des matrices lorsqu'on identifie les (x, u, v^*) dans \mathfrak{b} aux matrices $\begin{pmatrix} x & u \\ v^* & 0 \end{pmatrix}$ (de taille $(n+1)$). On vérifie que θ est un automorphisme d'ordre 2 de l'algèbre de Lie \mathfrak{b} , et il est visible que $\gamma(\mathfrak{c})$ est l'espace des points fixes de θ .

2. Soit \mathcal{N} le sous-groupe de $Ad^*(B)$ qui normalise $\mathfrak{c}^* \subset \mathfrak{b}^*$. On vérifie que \mathcal{N} est l'ensemble des $Ad_B^*(g, u, -{}^t u)$, avec g dans $O(n)$ et u dans V , et que l'image de \mathcal{N} dans $GL(\mathfrak{c}^*)$ qui en résulte coïncide avec $Ad^*(C)$.

3.4. Lemme : Les fonctions Ψ_k sont $Ad^*(C)$ -invariantes.

L'invariance des fonctions Ψ_k résulte immédiatement de celle des fonctions F_k sous l'action coadjointe de B , et de la remarque (2) ci-dessus.

3.5. Note bibliographique :

Dans [Ka-2], Kaneta construit un sous-espace vectoriel \mathfrak{h} de \mathfrak{c}^* , essentiellement : $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \times \mathbb{C} e_n^*$, où \mathfrak{h}_0 est un tore maximal de $so(n-1)$ ($so(n-1)$ étant plongé naturellement, "en haut et à gauche", dans $so(n)$). Explicitement (après complexification)

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ z = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & 0 \\ -a_1 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & a_\ell & 0 \\ & & & -a_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (a_1, a_2, \dots, a_\ell) \in \mathbb{C}^\ell \right\}, \text{ lorsque } n = 2\ell + 1$$

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ z = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & a_\ell & 0 & 0 \\ & & & -a_\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (a_1, a_2, \dots, a_\ell) \in \mathbb{C}^\ell \right\}, \text{ lorsque } n = 2\ell + 2$$

Il est facile de voir que l'opération de restriction à \mathfrak{h} des fonctions polynômes appartenant à $Y(\mathfrak{c})$ est un monomorphisme d'algèbres dans l'algèbre des fonctions polynômes sur \mathfrak{h} (c.f. Lemma 3.5 dans [Ka-2], où le corps de base est \mathbb{R}). Ceci étant, Kaneta définit des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ sur \mathfrak{h} , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_k(z, ae_n^*) &= a^2 \sigma_k(a_1^2, \dots, a_\ell^2) & (0 \leq k \leq \ell - 1) \\ \varphi_\ell(z, ae_n^*) &= aa_1 a_2 \dots a_\ell & \text{lorsque } n = 2\ell + 1 \\ \varphi_\ell(z, ae_n^*) &= a^2 \sigma_\ell(a_1^2, \dots, a_\ell^2) & \text{lorsque } n = 2\ell + 2 \end{aligned}$$

où σ_k ($0 \leq k \leq \ell$) est la $k^{\text{ième}}$ fonction symétrique élémentaire ($\sigma_0 = 1$) ;

et démontre le :

Théorème (Theorem 2 dans [Ka-2])

La \mathbb{C} -algèbre $Y(\mathfrak{c})$ est isomorphe, via l'application de restriction $\psi \mapsto \psi|_{\mathfrak{h}}$, à la \mathbb{C} -algèbre $\mathbb{C}[\varphi_0, \dots, \varphi_\ell]$. Les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\ell$, sont algébriquement indépendants.

3.6. Proposition : Lorsque $n = 2\ell + 2$, l'algèbre J des invariants de $IO(n)$ dans $S(\mathfrak{c})$ coïncide avec $Y(\mathfrak{c})$ et :

$$J = \mathbb{C}[\psi_0, \dots, \psi_\ell]$$

DÉMONSTRATION : Lorsque $(z, a e_n^*)$ appartient à \mathfrak{h} , il vient :

$$\psi_k(z, a e_n^*) = a^2 \sigma_k(a_1^2, \dots, a_\ell^2) = \varphi_k(z, a e_n^*)$$

Comme les ψ_k sont $Ad^*(IO(n))$ -invariantes, on voit que $Y(\mathfrak{c}) \subset J$. Par suite, les invariants de $ISO(n)$ coïncident avec les invariants de $IO(n)$.

3.7. Supposons $n = 2\ell + 1$. Comme vu plus haut, les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell-1}$, sont les restrictions à \mathfrak{h} des fonctions $IO(n)$ -invariantes $\psi_0, \dots, \psi_{\ell-1}$. Par contre, φ_ℓ^2 est la restriction à \mathfrak{h} de la fonction ψ_ℓ .

Soit $g = \begin{pmatrix} I_{2\ell} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (où $I_{2\ell}$ est la matrice unité de taille 2ℓ). On a : $Ad^*(g, 0).(z, a e_n^*) = (z, -a e_n^*)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \varphi_k(Ad^*(g, 0).(z, a e_n^*)) &= \varphi_k(z, a e_n^*) \quad (0 \leq k \leq \ell - 1) \\ \varphi_\ell(Ad^*(g, 0).(z, a e_n^*)) &= -\varphi_\ell(z, a e_n^*) \end{aligned}$$

Par suite :

$$J = \mathbb{C}[\psi_0, \dots, \psi_\ell]$$

$$Y(\mathfrak{c}) = \mathbb{C}[\psi_0, \dots, \psi_{\ell-1}, \Phi]$$

où Φ est l'unique polynôme dans $Y(\mathfrak{c})$ tel que : $\Phi|_{\mathfrak{h}} = \varphi_\ell$.

3.8. Il reste à expliciter le polynôme Φ . Comme :

$$\Phi^2(y, w^*) = \psi_\ell(y, w^*) = -w^* B_{2\ell}(y)^t w^*$$

on voit que $\Phi^2(y, w^*) = \det Y$, avec $Y = \begin{pmatrix} y & -^t w^* \\ w^* & 0 \end{pmatrix}$. Donc Φ coïncide, au signe près, avec le pfaffien $Pf(Y)$ de la matrice Y (de taille $(2\ell + 2)$).

Ici, il est peut-être utile de faire le lien avec ce qui est appelé “le pfaffien vectoriel” $pf : so(2\ell + 1) \longrightarrow \mathbb{C}^{2\ell+1}$ dans ([Ra-3], n° 2.6). Il s'agit d'un covariant polynomial qui est lié au pfaffien scalaire, de la manière suivante :

$$w^* pf(y) = Pf \begin{pmatrix} y & -^t w^* \\ w^* & 0 \end{pmatrix}$$

et : $pf(gyg^{-1}) = (\det g)g.pf(y)$ ($g \in O(2\ell + 1)$).

Ainsi, l'invariant “exotique” Φ est, au signe près :

$$\Phi(y, w^*) = w^* pf(y).$$

3.9. Note bibliographique :

Dans [Pa], les invariants polynômes pour les \mathbb{Z}_2 -réductions notées

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_o) = (so(n+m), so(m) \oplus so(n))$$

sont déterminés (Theorem 4.4) par une méthode générale. Le cas $ISO(n)$ étudié ci-dessus en est un exemple.

3.10. Remarques :

1. Comme dans 2.8, il est possible d'avoir d'autres expressions pour les polynômes ψ_k , du type :

$$\psi_k(y, w^*) = p_{2k+2}(Y) - p_{2k+2}(y)$$

avec : $Y = \begin{pmatrix} y & -{}^t w^* \\ w^* & 0 \end{pmatrix}$, et il est possible d'en déduire que le commutant de $so(n)$ dans l'algèbre enveloppante de \mathfrak{c} est commutatif (c.f. [Ra-3], formules (1;7) et n° 2.6).

2. Compte-tenu de ce qui précède, l'algèbre J des invariants de $IO(n)$ est l'image de $Y(\mathfrak{b})$ par l'opération de restriction à \mathfrak{c}^* des fonctions polynomiales sur \mathfrak{b}^* . Ainsi J est un quotient de $Y(\mathfrak{b})$. Il est probable qu'il y ait une explication "conceptuelle" à ce fait.

Bibliographie

- [Ka-1] KANETA H., *The invariant polynomial algebras for the groups $ISL(n)$ and $ISp(n)$* . Nagoya Math. J., 94, (1984), 61-73.
- [Ka-2] KANETA H., *The invariant polynomial algebras for the groups $IU(n)$ and $ISO(n)$* . Nagoya Math. J., 94, (1984), 43-59.
- [Pa] PANYUSHEV D., *On the coadjoint representation of \mathbb{Z}_2 -contractions of reductive Lie algebras*. Advances in Mathematics, 213, (2007), 380-404.
- [Ra-1] RAÏS M., *La représentation coadjointe du groupe affine*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 28, 1, (1978), 207-237.
- [Ra-2] RAÏS M., *L'indice des produits semi-directs $E \times_{\rho} \mathfrak{g}$* . C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287, (11 septembre 1978).
- [Ra-3] RAÏS M., *Une formule de réduction pour le polynôme caractéristique. Application à la théorie classique des invariants*. Publ. Dépt. Math n° 6, Univ. Poitiers, (1983).
- [Ti] TIKARADZE A., *Center of infinitesimal Cherednik algebra of $\mathfrak{g}(n)$* . Arxiv : 0901-2591.

Mustapha RAIS

E-mail : mustapha.rais@math.univ-poitiers.fr